ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 1

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 &= 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (6, -1, 3)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на ось Ox в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 18x - 4y + 4 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти расстояние от точки $P(1, -2)$ до прямой $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 2

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad + 3x_5 &= 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 4. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (2, 1, 3)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость $z = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & -1 \\ -15 & -13 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(1, -2)$ на прямую $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \ \text{ и } \ \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 3

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (4, 3, 7)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на ось Oz в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$8x_1^2 + 7x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -15 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $P(1, -2)$ на прямую $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 \in \Lambda^2(V^*) \ \text{ и } \ \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 4

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (6, 2, 4)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора зеркального отражения относительно плоскости Oyz в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$8x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 3 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $B = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти точку, симметричную точке $P(1, -2)$ относительно прямой $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 5

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 &= 2. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (8, -2, 3)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на ось Oy в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 18x - 4y + 4 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 11 & -12 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти расстояние от точки $P(-3, 2)$ до прямой $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 \in \Lambda^2(V^*) \ \text{ и } \ \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 6

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (4, 3, 7)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость $y = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2^2 + 8x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$-x_1^2 + 6x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту формую

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(-3, 2)$ на прямую $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^3 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 7

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 & = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 & = 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (10, 0, 7)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора поворота относительно оси Oy на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в положительном направленнии в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ -11 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$5x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 4x + 12y + 1 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 12 & -12 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $P(-3, 2)$ на прямую $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 8

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 & = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 & = 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (6, -2, 1)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора зеркального отражения относительно плоскости $z = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 3x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$5x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2x - 14y - 13 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту формую

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $B = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -24 & 15 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти точку, симметричную точке $P(-3, 2)$ относительно прямой $x^1 + 3x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 9

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (9, 2, 9)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость $y - z = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & -2 \\ -12 & -9 & 2 \\ 9 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 22x + 16y + 14 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 9 & -12 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти расстояние от точки $P(-4, 1)$ до прямой $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 10

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \qquad + 3x_5 &= 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (3, 2, 5)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора зеркального отражения относительно плоскости $y = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 13 & 10 & -2 \\ -18 & -15 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$-3x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 - 8x + 6y - 8 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту формую

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -23 & 25 \\ -20 & 22 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(-4, 1)$ на прямую $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 11

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (7, 2, 8)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость Oyz в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 16 & 11 & -4 \\ -18 & -13 & 4 \\ 21 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 14x - 8y + 6 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти онование перпендикуляра, опущенного из точки $P(-4, 1)$ на прямую $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^1 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 12

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad\quad + 2x_5 & = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 & = 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (7, 0, 5)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 13 & 8 & -4 \\ -12 & -7 & 4 \\ 24 & 16 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$-3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2x - 14y - 13 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -11 & 27 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти точку, симметричную точке $P(-4, 1)$ относительно прямой $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 13

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 &= 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 &= 3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (9, -2, 4)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора зеркального отражения относительно плоскости Oxz в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$-x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 22x - 16y + 14 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти расстояние от точки $P(2, -1)$ до прямой $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 14

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad + 4x_5 &= 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (4, -3, -1)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора поворота относительно оси Ox на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в положительном направлении в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 5x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 8x - 6y - 10 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -11 & 27 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(2, -1)$ на прямую $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^5 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 15

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 & = 1. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (5, 4, 9)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость $x - y = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ на имеет вид

$$\begin{pmatrix} -11 & -7 & 3 \\ 11 & 7 & -3 \\ -17 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 14x + 8y + 6 = 0$$

и построить ее.

9. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $P(2, -1)$ на прямую $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 \in \Lambda^2(V^*) \ \text{ и } \ \eta = e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 16

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \qquad - x_5 & = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 & = 2. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (9, -3, 3)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на плоскость $y + z = 0$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -5 & -1 & 3 \\ 20 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$5x_1^2 + 5x_1^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 14x + 2y + 3 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти точку, симметричную точке $P(2, -1)$ относительно прямой $x^1 + x^2 + 1 = 0$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3
по курсу "АЛГЕБРА"
ВАРИАНТ 17

1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ \qquad x_2 - x_3 \ + x_4 &= -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 &= 1, \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3. \end{cases}$$

Указать базис пространства решений соответствующей однородной системы, установить размерность этого пространства, выделить частное решение неоднородной системы.

2. Найти координаты вектора $x = (4, 4, 7)$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

3. Найти матрицу оператора проектирования на прямую $x = y = z$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найти ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad e_3' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

если в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 & 2 \\ 10 & 9 & -2 \\ -10 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Привести квадратичную форму

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

7. Привести квадратичную форму

$$7x_1^2 + 5x_1^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$$

к главным осям. Указать соответствующее ортогональное преобразование.

8. Исследовать кривую второго порядка

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 60 = 0$$

и построить ее.

9. Найти нормальную жорданову форму матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и базис, в котором она имеет эту форму.

10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$ из задачи 9 с использованием техники λ-матриц. Найти минимальный многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$.

11. Вычислить матрицу $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}t}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

12. Даны тензоры $T \in T_2^0, R \in R_1^1, S \in T_0^2$. Их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеют вид

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тех же тензоров в базисе

$$\boldsymbol{e}_1' = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1.$$

13. В пространстве с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти площадь треугольника с вершинами $A(1, -2)$, $B(-1, 0)$, $C(-4, 1)$.

14. Для кососимметрических тензоров

$$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(V^*) \text{ и } \eta = e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \in \Lambda^3(V^*)$$

найти тензоры

$$\omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \eta, \quad \eta \wedge \omega, \quad \eta \wedge \eta.$$