"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

________________А.А. Александров

"_____"_______________2015 г.

Типовой вариант задания по математике

олимпиады школьников «Шаг в будущее», (профиль «Математика»)

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17} = 52,\ a_{30} = 13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2\cos^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} - \cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y - 4| \le 4, \quad y < x + 2. \end{cases}$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 - 2x}}{2x + 5 - 2\sqrt{x^2 + 5x + 6}} \le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3\big/\left(x^2 - 4x + 5\right)$. (10 баллов)

7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении $24:25$. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$ (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x - a)^2 - 1 = 2\left(x + |x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними 30°. (12 баллов)

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V-4$ – скорость второго. Тогда $\frac{1000}{V-4}=\frac{1000}{V}+12{,}5;\ \frac{80}{V-4}=\frac{80}{V}+1;\ V^2-4V-320=0,\ V=2\pm18;V_1=20,\ V_2=20-4=16$.

$\Delta l=\frac{1000\cdot 20}{16}-1000=250$. **Ответ**: 250 м.

2. $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$, $\left(2^x\right)^2-2^x-12=0$; $2^x=\left(1\pm 7\right)/2$, $2^x=4,\ x=2$. **Ответ:** $x=2$.

3. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,
$\begin{cases} a+16d=52, \\ a+29d=13 \end{cases} \Leftrightarrow d=-3,\ a=100$.
Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=\left[103/3\right]=34$. Тогда $\max S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(100+100-3\cdot 33)\cdot 34=1717$. **Ответ:** 1717.

4. Найдем все целочисленные решения системы $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4,\quad y<x+2. \end{cases}$

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge 0$, т.е. при $-4+16k\le y\le 4+16k,\ k\in Z,$ имеем

$$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \ \Leftrightarrow\ (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$$

или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \ \Leftrightarrow\ y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+16k),\ (l;\,-2+16k),\ (8n;\,m),\ l,k,n,m\in Z,$ $-4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;\,4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;\,0),\ (0;\,1),\ (1;\,2),\ (2;\,2)$. **Ответ:** $(0;\,0),\ (0;\,1),\ (1;\,2),\ (2;\,2)$.

5. Решим неравенство $$\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}}\le 0.$$

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\quad x^2+5x+6\ge 0,\quad\Rightarrow$ $x\in(-\infty;\,-3]\cup[-2;\,-1]\cup[0;\,2]$.
На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему
$$\frac{x^2+x-(4-2x)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0.$$

Если $x \ge -2$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2} \le 0$, и $x \in [-2;\,1]$.

С учетом ОДЗ $x \in [-2;\,-1] \cup [0;1]$.

Если $x \le -3$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2} \le 0$, и

$x \in (-\infty;\,-4]$, что входит в ОДЗ. Окончательно имеем $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$.

Ответ: $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$.

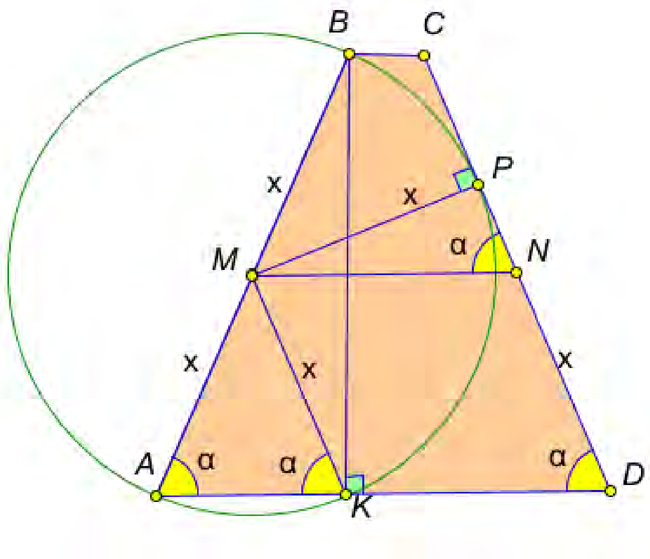
6. Найдем множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$.

Функция $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\,3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty;\,2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;\,+\infty)$ – убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\,9]$, поскольку $t = g(x) \in (0;\,3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\,9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\,g(2)] = [3/50;\,3]$.

Ответ: $E_f = \left[\dfrac{3}{50};\,3\right]$.

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB = CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD. Обозначим радиус окружности x. Тогда $AM = MB = MP = x$. Пусть N - середина стороны CD, тогда треугольник MPN прямоугольный,

$\angle P = 90^\circ$, $\angle MNP = \angle A = \alpha$, $MN = \dfrac{x}{\sin\alpha}$.



Пусть K - точка пересечения окружности с основанием AD $(K \ne A)$. Треугольник ABK - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$, BK - высота трапеции, $BK = AB\sin\alpha = 2x\sin\alpha$.

$S_{ABCD} = MN \cdot BK = 2x^2 = 450 \quad \Rightarrow \quad x = 15$,

$AB = CD = 2x = 30$.

$AK = AB\cos\alpha = 2x\cos\alpha$, $KMND$ - параллелограмм, $KD = MN = \dfrac{x}{\sin\alpha}$.

$$\frac{AK}{KD} = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \pm\frac{7}{25} \quad \Rightarrow$$

1) $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{4}{5}$ или

2) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

<u>Для первого случая имеем</u>: $AK=2x\cos\alpha=24$, $KD=\dfrac{x}{\sin\alpha}=25$, $AD=AK+KD=49$, $BC=2MN-AD=1$.

<u>Для второго случая имеем</u>: $AK=2x\cos\alpha=18$, $KD=\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{75}{4}$, $AD=AK+KD=\dfrac{147}{4}$, $BC=2MN-AD=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\dfrac{3}{4}$**,** $\dfrac{147}{4}$, 30, 30.

8. Составим уравнение общей касательной к графикам функций $y=1+x-x^2$ и $y=0,5\left(x^2+3\right)$. Пусть $y=ax+b$ — уравнение общей касательной. Тогда.

$1+x-x^2=ax+b,\ x^2+(a-1)x+b-1=0$.

$D=(a-1)^2-4b+4=0,\ a^2-2a-4b+5=0$. (*)

$0,5\left(x^2+3\right)=ax+b,\ x^2-2ax-2b+3=0$.

$D/4=a^2-(-2b+3)=0,\ a^2+2b-3=0$. (**)

Из (*) и (**) получаем $3a^2-2a-1=0,\ a_1=1,\ a_2=-1/3$. $b=\dfrac{3-a^2}{2},\ b_1=1, b_2=\dfrac{13}{9}$.

Ответ: $y=x+1,\ y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{9}$.

9. Определим все значения *a*, при которых уравнение $(x-a)^2-1=2\left(x+|x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Рассмотрим два случая.

I. $x\ge 0,\quad (x-a)^2-1=4x,\ x^2-2(a+2)x+a^2-1=0$; $D/4=a^2+4a+4-a^2+1=4a+5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=a+2\pm\sqrt{4a+5}$, если

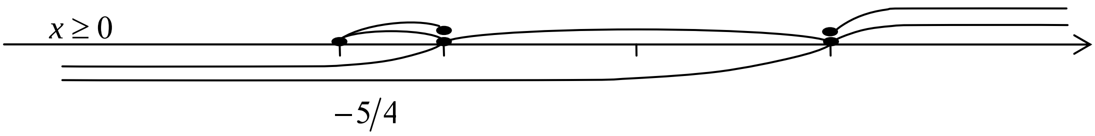
$$\begin{cases}4a+5>0,\\ a+2>0,\\ a^2-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-5/4,\\ \left[\begin{array}{l}a\le -1,\\ a\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5/4<a\le -1,\\ \quad a\ge 1.\end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2}=a+2+\sqrt{4a+5}$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=4a+5=0,\\ a+2\ge 0,\end{cases}\\ a^2-1<0,\\ \begin{cases}a^2-1=0,\\ a+2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-5/4,\\ a>-2,\end{cases}\\ -1<a<1,\\ \begin{cases}a^2-1=0,\\ a+2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-5/4,\\ -1<a<1.\end{array}\right.$$

II. $x<0,\quad (x-a)^2-1=0$.

Корень $x_1 = a+1<0$, если $a<-1$, и корень $x_2 = a-1<0$, если $a<1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a-1$, если $-1 \le a < 1$.

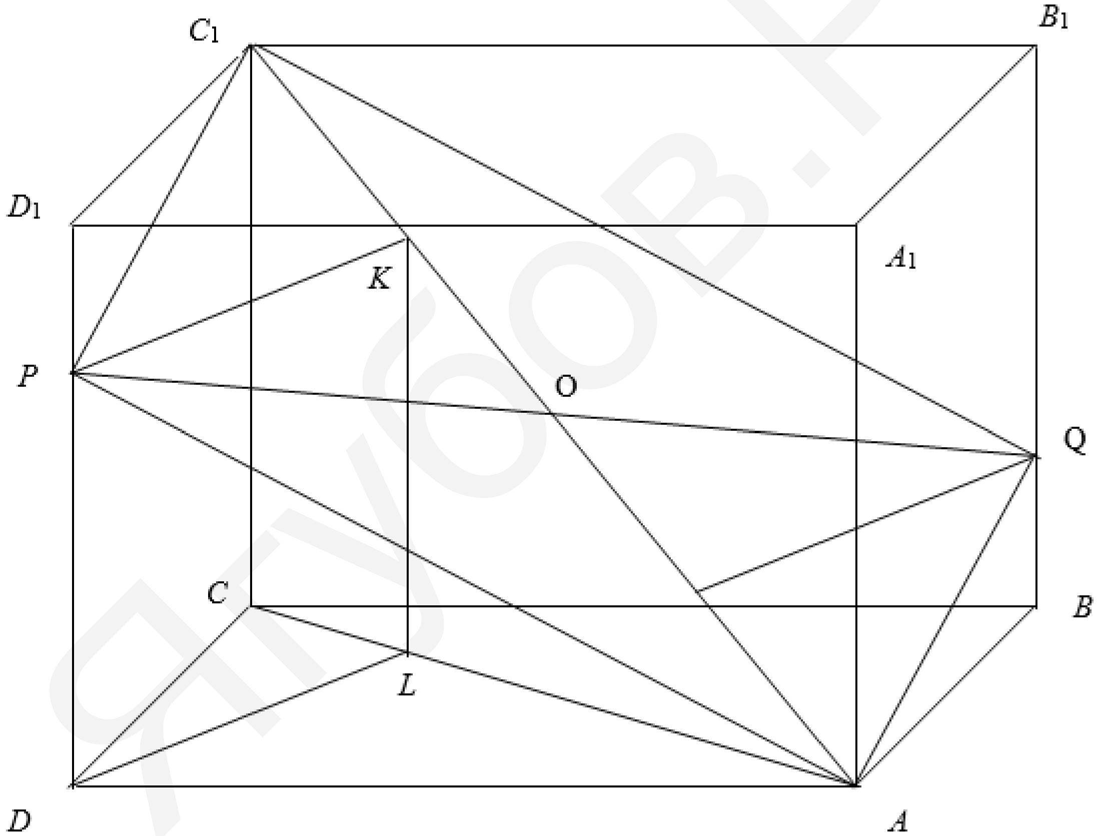


Ответ: $a \in (-\infty; -5/4)$, $\quad x_{1,2} = a \pm 1$;

$a \in (-1;1)$, $\quad x_1 = a-1$, $\quad x_2 = a+2+\sqrt{4a+5}$;

$a \in [1;+\infty)$, $\quad x_{1,2} = a+2 \pm \sqrt{4a+5}$.

10.



Проведем $DL \perp AC$, $LK \| CC_1$ $(K \in AC_1)$, $PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 3,\ PQ = \sqrt{3},\ \varphi = 30°,\ \sin\varphi = 1/2,\ \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$ $\quad OK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3/2 - 3/4}{3/2 + 3/4} = \frac{1}{3}.$ Пусть $CL = x,$ тогда $AL = 3x,\ AC = 4x.$

$DL^2 = CL\cdot AL,$ т.е. $\frac{3}{16} = 3x^2,\ x = \frac{1}{4},\ AC = 1.\ CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}.$

Объем $V = AC\cdot DL\cdot CC_1 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ **Ответ:** $\sqrt{6}/2.$