ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32111

1. Найдите все натуральные n такие, что сумма первых n-1 членов арифметической прогрессии $3n^3$, $5n^3$, $7n^3$, … кратна 3000.

2. Рекламный плакат занимает всю боковую поверхность цилиндрической башни высотой не менее 4 м и имеющей площадь основания не более 6 м^2. Плакат разбит на чёрные квадраты и белые треугольники, соседствующие друг с другом так, что каждая сторона каждого квадрата является стороной соседнего треугольника, а ровно две стороны каждого треугольника являются сторонами соседних квадратов. Какое число квадратов может поместиться на таком плакате? Найдите минимальную долю чёрной части плаката.

3. Основания правильных треугольников лежат на вертикальной оси и примыкают друг к другу. Стороны треугольников последовательно имеют длины 2, 4, 6, 8, … . Найдите уравнение кривой, на которой лежат центры симметрии треугольников.

4. Даны три утверждения.

(1) Уравнение $a\sin(x^2) + b\cos(x^2) + c = 0$ не имеет решения.

(2) Уравнение $2a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{ctg}\,x + 2c = 0$ не имеет решения.

(3) В треугольнике со сторонами a, b, c сторона c лежит против тупого угла.

Какие из этих утверждений одновременно могут быть верными, если a, b, c – действительные числа, не равные нулю? Какие из этих трёх утверждений являются следствиями других?

5. Две улитки ползут вдоль замкнутого забора с постоянными скоростями v_1 и v_2 заборов в час, причём $0 \le v_1 \le 1, 0 \le v_2 \le 1$. Докажите, что если бы вместо улиток были ежи и первый пробежал бы расстояние v_1 со скоростью $2v_2+3$, а второй сразу же после этого пробежал расстояние v_2 со скоростью $2v_1+3$, то такое перемещение заняло бы не больше 24 минут.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32112

1. В точке $O(0,0)$ координатной плоскости находится электростанция, в точках $A(0,6)$, $B(8,6)$, $C(8,0)$ – потребители электроэнергии. Найдите внутри фигуры $OABC$ точки P, Q такие, чтобы углы OAP, AOP, BCQ, CBQ были равны между собой и суммарная длина отрезков OP, AP, PQ, BQ, CQ электрокабеля была наименьшей. Если измерять расстояния километрами, то хватит ли для прокладки указанных отрезков 19 км кабеля?

2. Функции $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ таковы, что уравнение $f_1(x) = 0$ имеет два различных корня и оба этих корня меньше 2014, а уравнение $f_2(x) = 0$ также имеет два различных корня и оба его корня больше 2014. Может ли уравнение $f_1(x) + 2f_2(x) = 0$ не иметь вещественных корней, иметь два различных вещественных корня, иметь два корня, один из которых меньше 2014, а другой больше 2014?

3. Найдите все такие целые числа x, y, что $2(xy)^2 + xy - 6$ является квадратом простого числа.

4. Лучшего спортсмена года выбирают 20 экспертов из 5 кандидатов. Каждый эксперт подает один голос ровно за одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса? Два журналиста, не входящие в число экспертов, считают, что один из кандидатов не может быть лучшим, а четверо остальных вполне достойны. Какова вероятность избрания лучшим этого спортсмена первоначальным (из 20) и расширенным (из 22) составом экспертов, включающим и двух таких журналистов ?

5. Найдите все возможные значения углов треугольника, у которого длины высот – целые числа, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит такой треугольник, а высота пирамиды равна периметру основания.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 33111

1. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\sin (x^2) \sin (y^2)=|\sin (x^2) \sin(y^2)|.$$

2. На прямолинейной просеке стоит лесник. По просеке он может идти со скоростью 4 км/ч, а по лесу – со скоростью 2 км/ч. Изобразите на рисунке в системе координат (ось ОХ совпадает с просекой, а лесник находится в начале координат) геометрическое место точек, в которые лесник может дойти за один час ходьбы. Найдите площадь области, в точки которой лесник может дойти не более, чем за один час ходьбы.

3. В заполярном городе производственные помещения одной из фирм располагались в вершинах прямоугольника со сторонами 80 метров и 60 метров. Руководство фирмы решило соединить эти помещения крытыми переходами. Но оказалось, что на эти цели фирма может выделить деньги достаточные для строительства только 186 метров переходов. Можно ли на эти деньги построить переходы так, чтобы из любого помещения можно было попасть в любое другое, не выходя на улицу? Предложите вариант прокладки таких переходов или докажите, что его не существует.

4. Найдите все натуральные n такие, что сумма первых n-1 членов арифметической прогрессии $3n^3$, $5n^3$, $7n^3$, … кратна 3000.

5.. Покажите, что функция

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{7}{5}-xy-\frac{x}{2y+3}-\frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x,y \in [0,1]$. Найдите максимальное и минимальное значения функции в этой области.