

## Интеграл. Геометрия

Данный листок посвящён применению интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.

ЗАДАЧА 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией  $y = x(x - 1)^2$  и осью абсцисс.

$$\frac{\pi}{1}$$

ЗАДАЧА 2. Найдите площадь симметричного параболического сегмента с основанием  $a$  и высотой  $h$ .

$$\frac{2}{3}ah$$

ЗАДАЧА 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$ .

$$\frac{8}{15}$$

ЗАДАЧА 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = x^3/3$ .

$$\frac{1}{6}$$

ЗАДАЧА 5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x+1}$  и  $y = (x+1)/3$ .

$$\frac{2}{6}$$

ЗАДАЧА 6. Найдите площадь фигуры, заключённой между параболой  $y = -x^2 + 4x - 3$  и касательными к ней в точках  $(0, -3)$  и  $(3, 0)$ .

$$\frac{1}{6}$$

ЗАДАЧА 7. Найдите меньшую из площадей фигур, на которые круг  $x^2 + y^2 \leq 16$  делится параболой  $y^2 = 6x$ .

$$\frac{\pi}{\pi^2 + 4\sqrt{3} + 9}$$

ЗАДАЧА 8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 1/(1+x^2)$  и  $y = x^2/2$ .

$$\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{2}$$

ЗАДАЧА 9. Найдите площадь одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ .

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ЗАДАЧА 10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$  и осью абсцисс.

$$1 - \frac{\pi}{2}$$

ЗАДАЧА 11. Найдите площадь эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

$$\pi ab$$

ЗАДАЧА 12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 1/x^2$ ,  $x = 1$  и осью абсцисс.

1

ЗАДАЧА 13. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линией  $y = 1/(1 + x^2)$  (эта кривая называется *локоном Анъези*).

ш

ЗАДАЧА 14. Вычислите объём конуса с площадью основания  $S$  и высотой  $h$ ,

$\frac{1}{3}Sh$

ЗАДАЧА 15. Фигура, ограниченная линиями  $y = \cos x$ ,  $x = \pm\pi/2$  и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{2}{\pi}$

ЗАДАЧА 16. Эллипс  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  вращается вокруг оси абсцисс. Найдите объём получающегося *эллипсоида вращения*. В частном случае выведите формулу объёма шара.

$\frac{4}{3}\pi a^2 b$

ЗАДАЧА 17. Фигура, ограниченная параболой  $y = 1 - x^2$  и осью абсцисс, вращается вокруг оси ординат. Найдите объём полученного *параболоида вращения*.

$\frac{2}{3}$

ЗАДАЧА 18. Найдите объём параболоида вращения с площадью основания  $S$  и высотой  $h$ .

$\frac{1}{3}Sh$

ЗАДАЧА 19. (*Лимон Кавальери*) Симметричный параболический сегмент с основанием  $2a$  и высотой  $h$  вращается вокруг основания. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{1}{9}\pi a^2 h$

ЗАДАЧА 20. Фигура, ограниченная параболой  $y = 2x - x^2$  и осью абсцисс, вращается вокруг оси ординат. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{8}{3}$

ЗАДАЧА 21. Фигура  $F$  ограничена линиями  $y = 1/x$ ,  $x = 1$  и осью абсцисс.

а) Имеет ли фигура  $F$  конечную площадь?

б) Фигуру  $F$  вращают вокруг оси абсцисс. Имеет ли полученное тело вращения конечный объём?

а) Нет; б) да